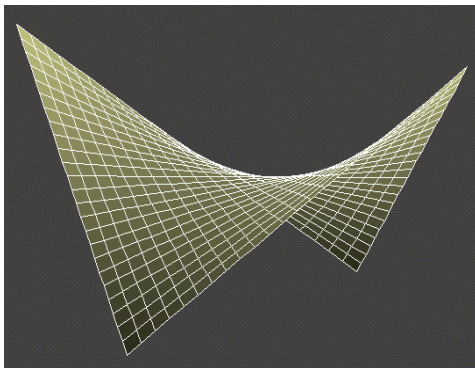


Cadran solaire de temps moyen sur un paraboloïde hyperbolique

Francis Ziegeltrum

1. Introduction

Le plan est certainement la surface la plus utilisée comme support d'un cadran solaire de temps moyen. Pourtant il existe un grand nombre de surfaces, bien plus esthétiques, qui pourraient se prêter à la réalisation d'un cadran solaire courbe. D'ailleurs grâce à l'outil informatique et aux logiciels de rendu 3D il est possible de faire des simulations très réalistes. Mais la réalisation pratique est plus difficile car il faut dans un premier temps fabriquer la surface puis, les calculs des courbes en huit effectués, les reporter sur la surface. On se rend compte que mis à part le cylindre et le cône il n'existe pas vraiment de surfaces susceptibles d'être fabriquées avec peu de moyen matériel, même la sphère demande une grande dextérité. Pourtant dès le début du XXème siècle des architectes tels Gaudi ou Le Corbusier ont su intégrer des surfaces complexes dans leurs œuvres architecturales. Ils ont puisé dans la famille de surfaces dites réglées dont la caractéristique principale est d'être engendrée par des droites. Parmi ces surfaces il en est une qu'ils affectionnaient particulièrement, le paraboloïde hyperbolique.



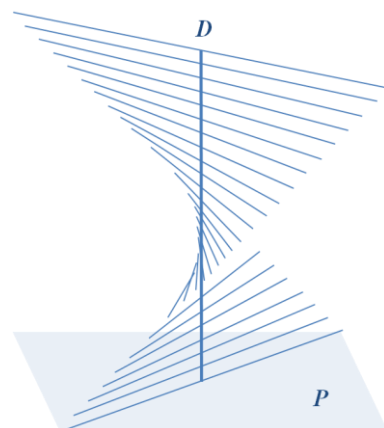
Représentation graphique d'un paraboloïde hyperbolique



Pavillon Philips de Yannis Xenakis et Le Corbusier, ouvrage réalisé à partir de paraboloïdes hyperboliques.

2. Qu'est qu'un paraboloïde hyperbolique ?

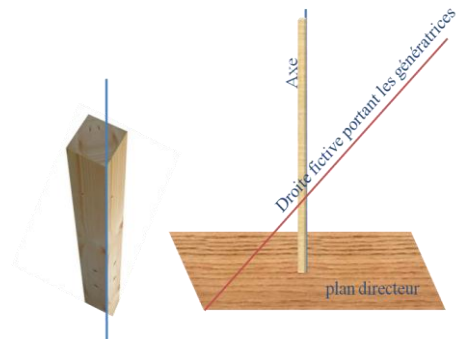
Un paraboloïde hyperbolique est un conoïde droit c'est à dire une surface réglée dont les génératrices restent parallèles à un plan P , appelé plan directeur du conoïde tout en rencontrant une droite D , appelée axe du conoïde, perpendiculaire à P . Dans le cas du paraboloïde hyperbolique les génératrices s'appuient également sur deux droites non coplanaires. La surface est en quelque sorte un empilage de droites parallèles à un plan tournant autour d'un axe. C'est cette particularité que nous allons exploiter pour réaliser une maquette en bois.



3. Réalisation de la surface courbe

Le support

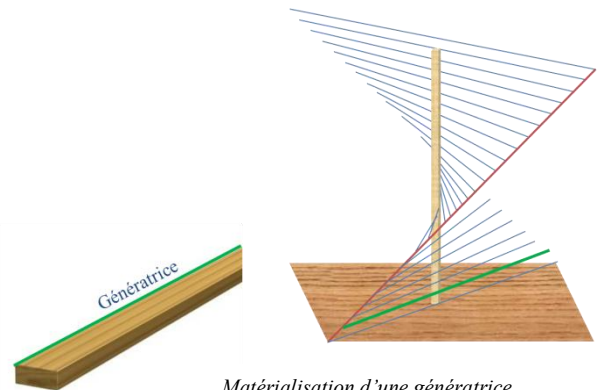
Pour fabriquer le paraboloïde hyperbolique il nous faut d'abord réaliser un support constitué d'une planchette qui matérialise le plan directeur et d'une baguette carrée dont l'une des arêtes matérialise l'axe du conoïde. La planchette est posée horizontalement et la baguette est fixée perpendiculairement à la face supérieure de la planchette. Il n'est pas nécessaire de matérialiser les droites portant les génératrices. Il suffira de vérifier durant le montage de la surface que les génératrices coupent l'une des droites.



Matérialisation du plan directeur et de l'axe

Les génératrices

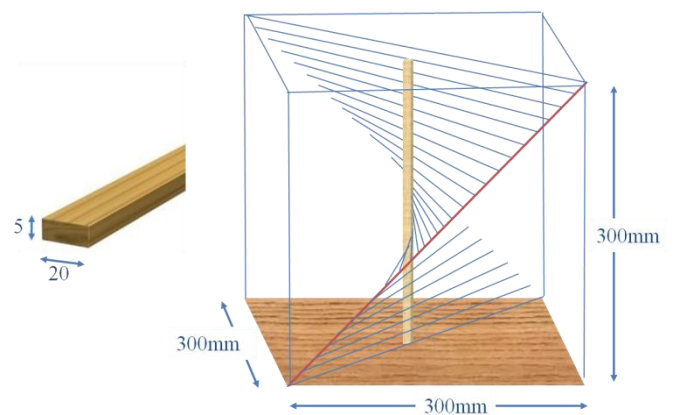
Les génératrices de la surface sont matérialisées par une des arêtes des tasseaux que l'on empile les uns sur les autres en les plaquant contre l'arête de la baguette matérialisant l'axe. Nous n'aurons donc qu'un certain nombre de génératrices dépendant de l'épaisseur des tasseaux par rapport aux dimensions du paraboloïde hyperbolique. La surface obtenue ne sera donc pas lisse et continue.



Matérialisation d'une génératrice

Les dimensions

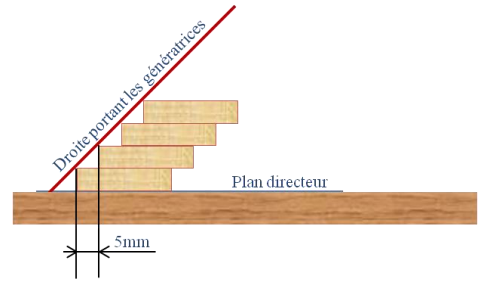
Pour faciliter les calculs et pour simplifier la réalisation j'ai choisi un paraboloïde hyperbolique contenu dans un cube de dimensions 300x300x300mm. Les droites portant les génératrices font un angle de 45° par rapport au plan directeur, ce sont les diagonales de deux faces du cube. Il convient de bien choisir la largeur des tasseaux pour qu'elles restent, une fois empilées, en contact entre elles sur toute la longueur. Dans mon cas ils ont une largeur de 20mm et une épaisseur de 5mm. La surface est constituée de 61 tasseaux.



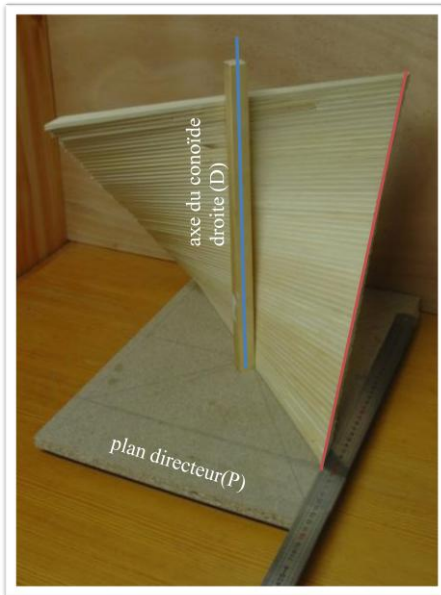
Dimensions du paraboloïde hyperbolique

La maquette

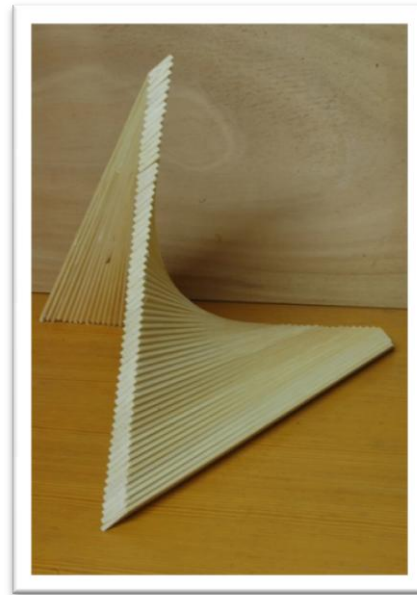
Un premier tasseau est posé sur le plan directeur, son arête matérialise la première génératrice. Le deuxième tasseau convenablement coupé vient se placer sur le premier, décalé de 5mm. Les tasseaux sont coupés puis collés les uns sur les autres en suivant l'axe et une des droites d'appui. Le parabololoïde hyperbolique ainsi obtenu donne la possibilité d'être manipulée pour trouver la surface la plus appropriée pour la réalisation d'un cadran solaire.



Détail de l'empilage des tasseaux



Maquette sur son support de fabrication



Maquette terminée

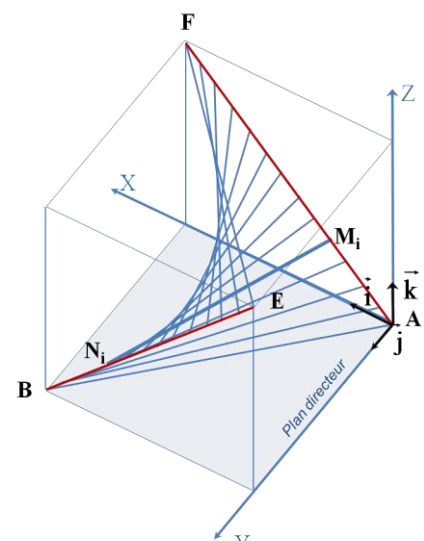
4. Calcul des courbes en huit

Paramétrage de la surface

Il existe plusieurs manières de mettre le parabololoïde hyperbolique en équation. La plus pratique pour la réalisation du cadran solaire est de paramétrer le vecteur directeur de la génératrice.

Comme le parabololoïde hyperbolique est contenu dans un cube les sommets A,B,E et F ont pour coordonnées :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} L \\ L \\ 0 \end{pmatrix} \quad E \begin{pmatrix} 0 \\ L \\ L \end{pmatrix} \quad F \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ L \end{pmatrix}$$



Parabololoïde hyperbolique placé dans le repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Où L est la longueur d'un coté du cube et d l'épaisseur d'un tasseau. L est un multiple de d.

Les deux droites d'appuis, l'une passant par A et F et l'autre passant par B et E, ont pour vecteurs directeurs :

$$\overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ L \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} -L \\ 0 \\ L \end{pmatrix}$$

On en déduit les vecteurs directeurs unitaires :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soient M_i et N_i les deux points de la ième génératrice appartenant respectivement à la droite passant par A et F et à la droite passant par B et E.

M_i et N_i sont tels que : $\overrightarrow{AM_i} = i.d \vec{u}$ et $\overrightarrow{BN_i} = i.d \vec{v}$. avec $0 \leq i \leq \frac{L+d}{d}$

$\overrightarrow{M_i N_i}$, le vecteur directeur de la ième génératrice, et peut être décomposé de la façon suivante :

$$\overrightarrow{M_i N_i} = \overrightarrow{M_i A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN_i} = -i.d.\vec{u} + \overrightarrow{AB} + i.d.\vec{v}$$

Connaissant les coordonnées de $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} L \\ L \\ 0 \end{pmatrix}$ les coordonnées du vecteur directeur de la ième génératrice sont :

$$\overrightarrow{M_i N_i} \begin{pmatrix} L - 2.i.d \\ L \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le paraboloïde hyperbolique est donc l'ensemble des droites de vecteur directeur

$$\overrightarrow{M_i N_i} \begin{pmatrix} L - 2.i.d \\ L \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } 0 \leq i \leq \frac{L+d}{d} \text{ et passant par le point } M_i \begin{pmatrix} i.d \\ 0 \\ i.d \end{pmatrix}$$

Positionnement de la surface

Pour orienter convenablement la surface du paraboloïde hyperbolique servant de table du cadran solaire par rapport au Sud, il faut dans un premier temps la faire pivoter autour du segment $\overrightarrow{AB}$ de telle sorte que les points A, B et E soit dans le plan horizontal puis la tourner autour de l'axe verticale pour que la pointe au point B soit dans l'axe du méridien local .

Ces rotations sont effectuées en utilisant les matrices de rotation autour d'un axe quelconque qui s'écrivent :

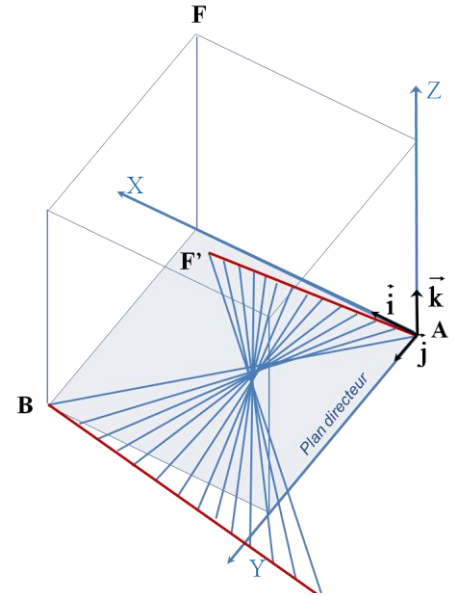
$$R(\vec{n}, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta + (1 - \cos \theta)n_1^2 & -n_3 \sin \theta + (1 - \cos \theta)n_1 n_2 & n_2 \sin \theta + (1 - \cos \theta)n_1 n_3 \\ n_3 \sin \theta + (1 - \cos \theta)n_1 n_2 & \cos \theta + (1 - \cos \theta)n_2^2 & -n_1 \sin \theta + (1 - \cos \theta)n_2 n_3 \\ -n_2 \sin \theta + (1 - \cos \theta)n_1 n_3 & n_1 \sin \theta + (1 - \cos \theta)n_2 n_3 & \cos \theta + (1 - \cos \theta)n_3^2 \end{pmatrix}$$

Où $\vec{n} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ est le vecteur directeur unitaire de l'axe de rotation et θ l'angle de rotation autour de cet axe.

La première rotation se fait autour du segment $\overline{AB}$, c'est-à-dire suivant l'axe dirigé par le vecteur unitaire $\frac{\overline{AB}}{\|\overline{AB}\|}$.

L'angle de rotation θ se calcule à partir des vecteurs normaux du plan contenant les points A, B, E et du plan horizontal. θ est l'angle entre les vecteurs $(\overline{AB} \wedge \overline{AE})$ et $\vec{k}$, donc :

$$\cos(\theta) = \frac{(\vec{k} \cdot (\overline{AB} \wedge \overline{AE}))}{\|\vec{k}\| \cdot \|\overline{AB} \wedge \overline{AE}\|}$$



Paraboloïde hyperbolique après rotation autour de $\overline{AB}$.

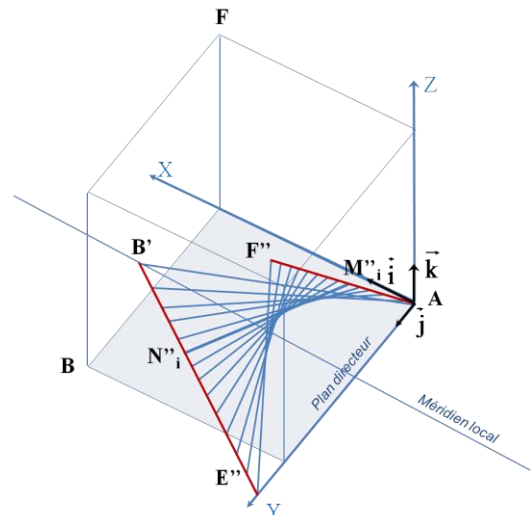
Après cette première rotation le vecteur directeur des génératrices s'écrit :

$$\overrightarrow{M'_i N'_i} = R\left(\frac{\overline{AB}}{\|\overline{AB}\|}, -\theta\right) \begin{pmatrix} L - 2.i.d \\ L \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour aligner la pointe B avec le méridien local il reste à tourner la surface autour de l'axe Z.

L'angle de rotation φ est l'angle entre $\overline{AE'}$ et $\vec{j}$, donc :

$$\cos(\varphi) = \frac{(\vec{j} \cdot \overline{AE'})}{\|\vec{j}\| \cdot \|\overline{AE'}\|}$$



Paraboloïde hyperbolique après rotation autour de l'axe Z.

Avec $\overrightarrow{AE'} = R\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}, -\theta\right) \overrightarrow{AE}$

Après cette deuxième rotation le vecteur directeur des génératrices s'écrit :

$$\overrightarrow{M''_i N''_i} = R(\vec{k}, -\varphi) \cdot R\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}, -\theta\right) \begin{pmatrix} L - 2 \cdot i \cdot d \\ L \\ 0 \end{pmatrix}$$

Projection d'un point sur la surface

Le cadran solaire courbe est constitué de la surface du paraboloïde hyperbolique tourné vers le sud et d'un point P appartenant au segment B''F'' tel que $\overrightarrow{B''P} = \alpha \overrightarrow{B''F''}$. C'est l'ombre de ce point P projetée sur la surface qui indique l'heure.

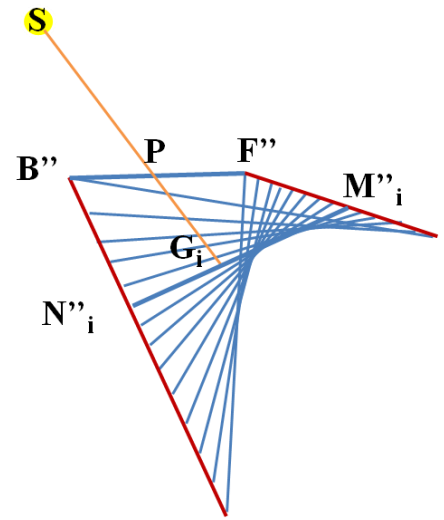
Le point P est projeté sur la surface si et seulement si il existe une génératrice sécante avec le rayon du Soleil passant par P. C'est-à-dire s'il existe une valeur i telle que le produit mixte:

$$[\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{M''_i N''_i}, \overrightarrow{PN''_i}] = 0$$

$\overrightarrow{SP}$ désigne le vecteur directeur du rayon du Soleil passant par le point P. Les coordonnées de ce vecteur se calculent à l'aide des formules développées dans le Traité abrégé de gnomonique à savoir :

$$\overrightarrow{SP} \begin{pmatrix} -x_h \\ -y_h \\ -z_h \end{pmatrix} = -R_y\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \cdot R_z(LMST) \cdot R_z(-\varepsilon) \begin{pmatrix} \cos l_{\odot} \\ \sin l_{\odot} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On peut alors calculer les coordonnées du point d'intersection G_i entre le rayon du Soleil et la génératrice en utilisant une méthode de calcul du point d'intersection de deux droites dans l'espace. Ce point G_i est l'ombre du point P projeté sur la surface suivant le vecteur $\overrightarrow{SP}$ calculé pour une date donnée. Pour tracer une courbe en huit il nous faut donc calculer tous les points G_i pour une heure légale donnée.



Projection de l'ombre d'un point sur la surface du paraboloïde hyperbolique

La feuille de calcul Excel

Les calculs sont effectués à l'aide d'une fonction Visual basic Excel comportant trois parties :

- Dans la première partie on effectue les rotations nécessaires pour placer la surface face au sud et on calcule les coordonnées des principaux vecteurs.
- Dans la deuxième sont calculés les produits mixtes $[\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{M''N''}, \overrightarrow{PN''}]$ en faisant varier i de 0 à L/d .
- Dans la troisième partie on détermine pour quelle valeur de i le produit mixte est minimal.

	C	D	E	F	G	H	R	S	T	U	V
1											
2	HEURE	12:00:00									
3	LATITUDE	47.6506									
4	LONGITUDE	-7.4442									
5	L	300									
6	d	5									
7	ALPHA	0.6									
8		DATE	X _h	Y _h	Z _h	i	X _i	Y _i	Z _i		Distance
9		11-avr	0.576	0.384	0.722	19	-110.01	-73.3	-138	3.00	210.8
10		18-avr	0.544	0.375	0.751	18	-103.33	-71.1	-143	3.00	205.0
11		26-avr	0.508	0.365	0.78	17	-96.787	-69.5	-149	3.00	199.5
12		4-mai	0.474	0.357	0.805	16	-88.544	-66.6	-150	4.00	193.4
13		4-juin	0.375	0.349	0.859	13	-73.962	-68.8	-169	3.00	186.1
14		20-juin	0.356	0.358	0.863	12	-70.467	-70.9	-171	2.00	186.9
15		18-juil	0.388	0.382	0.839	12	-78.021	-76.9	-169	2.00	196.8
16		30-juil	0.426	0.389	0.817	13	-85.589	-78.2	-164	2.00	201.8
17		18-août	0.508	0.39	0.768	16	-98.534	-75.6	-149	2.00	206.6
18		23-août	0.532	0.387	0.753	17	-101.27	-73.6	-143	3.00	207.0
19		27-août	0.553	0.385	0.739	18	-106.07	-73.8	-142	2.00	208.9
20		31-août	0.574	0.381	0.725	19	-109.36	-72.7	-138	3.00	209.8
21		4-sept	0.595	0.377	0.71	20	-111.91	-71.1	-134	3.00	210.3
22		9-sept	0.621	0.372	0.69	21	-112.43	-67.3	-125	2.00	209.8
23		13-sept	0.642	0.367	0.673	22	-114.64	-65.5	-120	2.00	210.5
24		17-sept	0.662	0.362	0.656	23	-116.66	-63.7	-116	2.00	211.2

Cette feuille de calcul contient également les formules pour calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{SP}$ à partir de la date, de la longitude et de la latitude du lieu.

Les données d'entrées sont :

- La longueur du côté du cube
- L'épaisseur des tasseaux
- La position de P sur le segment BF
- Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{SP}$

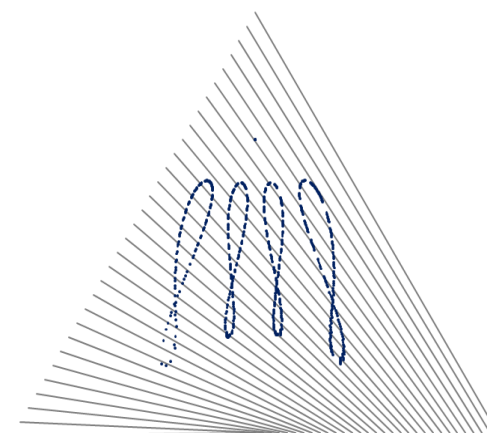
Les résultats fournis par cette fonction sont :

- Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{M''N''}$ et $\overrightarrow{AN''}$.
- La valeur de i correspondante permettant de localiser la génératrice de la surface.

Une fonction Visual Basic supplémentaire permet, grâce à ces résultats, de déterminer les points G_i des courbes en huit du cadran solaire de temps moyen.

La simulation

En calculant les courbes en huit pour différentes heures, par exemples 12h, 13h, 14h et 15h, et en représentant les génératrices par des segments on peut visualiser les résultats de la feuille de calcul afin d'optimiser au mieux la position du P. On peut ainsi faire en sorte que la surface du paraboloïde hyperbolique soit utilisée au mieux.

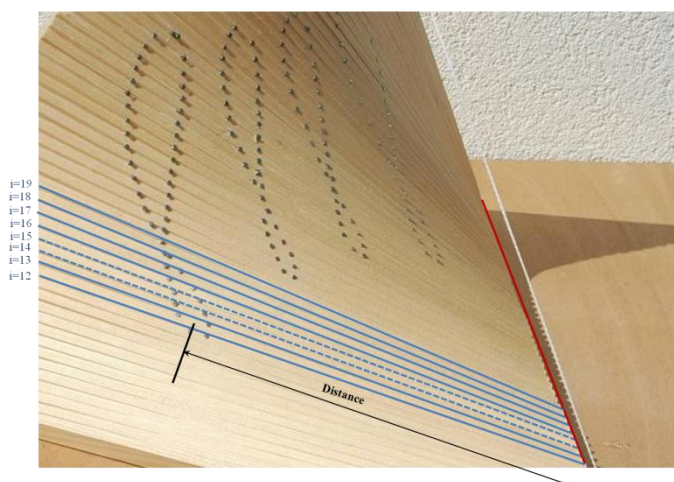


Vue de face du cadran solaire

Tracé des courbes en 8 sur la surface

Pour reporter les courbes en 8 sur la surface du cadran nous allons pouvoir utiliser la caractéristique principale de d'une surface réglée. La surface étant générée par les tasseaux dont l'une des arêtes est dirigées par le vecteur $\overrightarrow{M''_i N''_i}$, il suffit de calculer la distance $M''_i G_i$ et de la reporter sur l'arête du ième tasseau.

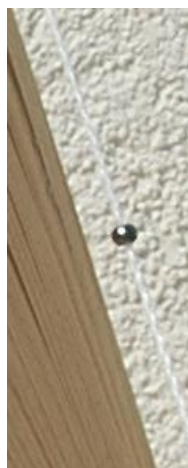
Chaque point calculé est matérialisé par un clou enfoncé au plus près de l'arête.



Mise en place des courbes en huit

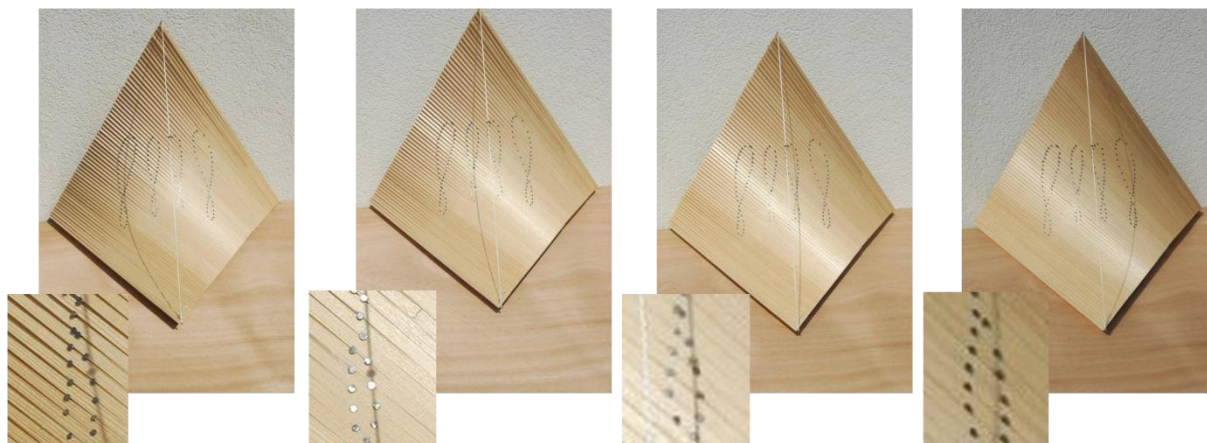
Mise en place du gnomon

Dans ce cas le gnomon se réduit au point P se projetant sur la surface du cadran. Le segment BF peut être matérialisé par une ficelle tendue entre ces deux points et le point P par une perle placée à la bonne distance.



Perle matérialisant le point P

Vérification du fonctionnement du cadran solaire



Le 1^{er} mai 2011, à 12h, 13h, 14h et 15h, le point d'ombre se trouve exactement sur la courbe en huit.

5. Conclusion

Une surface courbe ne peut être utilisée pour la réalisation d'un cadran solaire que si elle possède des caractéristiques la rendant facile à construire et si des outils issus de la géométrie analytique peuvent être aisément utilisés pour le calcul de la projection d'un point sur cette surface. Nous venons de voir que le parabolôïde hyperbolique se prête à merveille à cet exercice. Existents-ils d'autres surfaces susceptibles d'être transformées en cadrans solaires courbes ? La famille des surfaces réglées étant vaste il est certainement possible, en cherchant bien, d'en trouver d'autres.

6. Bibliographie

- J.Lelong-Ferrand et J.M.Arnaudiès : Cours de mathématiques-Tome 3-Géométrie et cinématique - Dunod Université
- F.Ziegeltrum : Traité abrégé de gnomonique – Autoédition
- Le site <http://www.mathcurve.com>